CAPITULO IV: Rectas Notables

Ejercicio Introductorio: Observe el siguiente mapa.

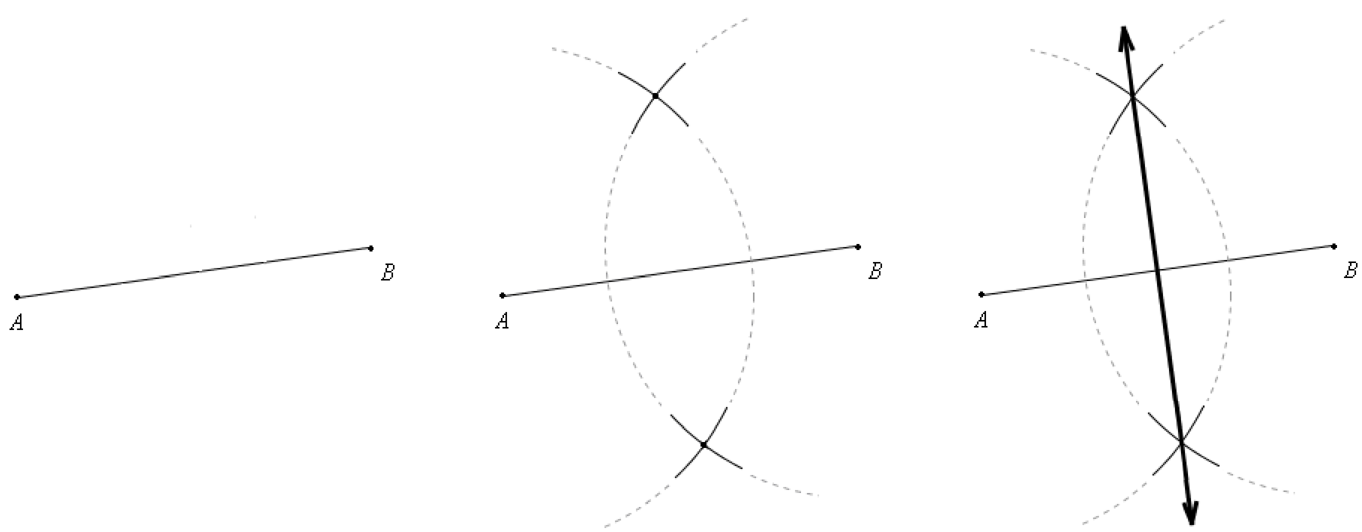
Una empresa dedicada a la venta de ropa tiene tres sucursales: una en Santa Ana, otra en Tibás y la última en Heredia.

Para reducir los costos de transporte, la empresa está buscando un punto que esté a la misma distancia de cada sucursal para instalar ahí el centro de producción.

La pregunta es: **¿dónde debe instalarse el centro de producción?**

A. Mediatrices

Para construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, encuentre dos puntos que equidisten de los extremos.



(Trace dos arcos con centro en A y otros dos con centro en B , los cuatro con el mismo radio, que debe ser mayor que $\frac{AB}{2}$. Luego, trace la línea que une los puntos de intersección)

La **mediatriz** de un lado de un triángulo es la recta perpendicular al lado que pasa por su punto medio.

La **mediatriz** de un segmento es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de los extremos del segmento.

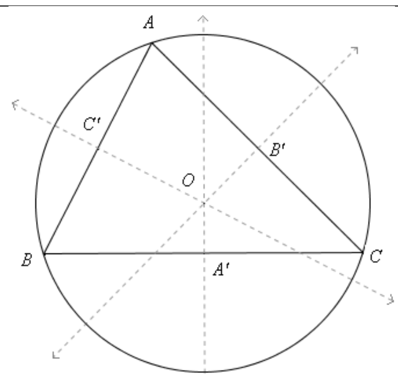
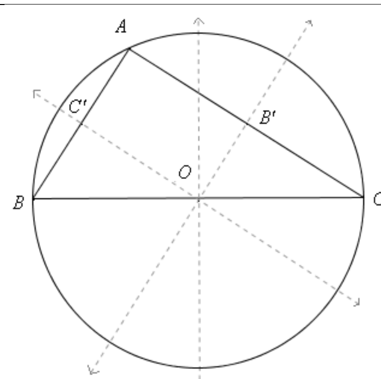
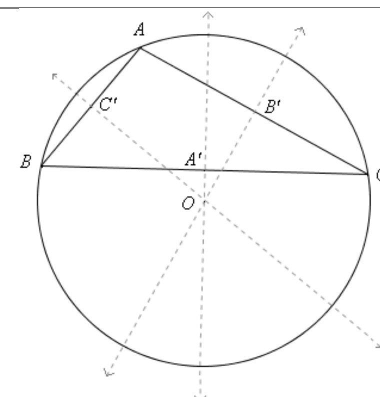
Es decir, cualquier punto sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ está a la misma distancia de A que de B.

Las tres mediatrices de un triángulo son **concurrentes**. El punto de intersección se llama **circuncentro.**

El círculo con centro en el circuncentro y que pasa por los vértices del triángulo se llama **circuncírculo.**

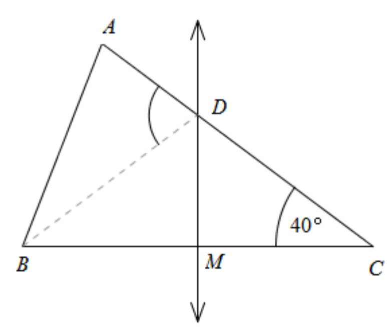
La distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices del triángulo se llama **circunradio.**

En las siguientes figuras, A', B' y C' representan los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, y O el circuncentro.

<table>
<tr>
<td>Acutángulo: El circuncentro está en el interior del triángulo.</td>
<td>Rectángulo: El circuncentro es el punto medio del lado de mayor longitud (que en un triángulo rectángulo se llama hipotenusa).</td>
<td>Obtusángulo: El circuncentro está en el exterior del triángulo.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

- Observe que en el triángulo rectángulo el circuncentro coincide con el punto medio de la **hipotenusa** $(O = A')$.

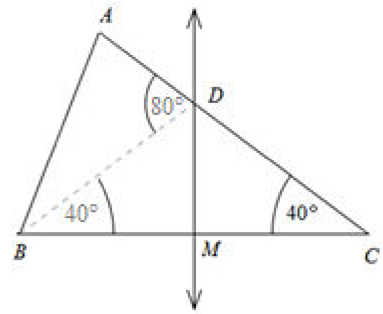
EJEMPLO 1. **De acuerdo con los datos de la figura, $\overleftrightarrow{MD}$ es la mediatriz de $\overleftrightarrow{BC}$. Encuentre $m\angle BDA$.**



Soluciones A.

EJEMPLO 1. De acuerdo con los datos de la figura, $\overleftrightarrow{MD}$ es la mediatriz de $\overleftrightarrow{BC}$. Encuentre $m\angle BDA$.

El ΔBDC es isósceles, ya que el punto D debe estar a la misma distancia de B y C (propiedad de la mediatriz).



Entonces, $\angle DBC \cong \angle DCB \Rightarrow m\angle DBC = 40°$ y por el teorema del ángulo externo: $m\angle BDA = m\angle DBC + m\angle DCB = 40° + 40° = 80°$.

Ejercicio A.

I PARTE: En las figuras del circuncírculo de la página anterior, resalte con un color las mediatrices y con otro los circunradios.

II PARTE: Escribir F (Falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición dada. Justifique su respuesta.

1. ___ Si una recta pasa por el punto medio de un segmento, esta es la mediatriz del segmento.

2. ___ El circuncentro de cualquier triángulo obtusángulo es exterior al triángulo.

3. ___ Si el circuncentro de un triángulo no es exterior a este, el triángulo es acutángulo.

4. ___ El circuncentro de cualquier triángulo rectángulo es interior al triángulo.

5. ___ Si O es el circuncentro del ΔDEF, el circunradio del triángulo es $\overline{OE}$.

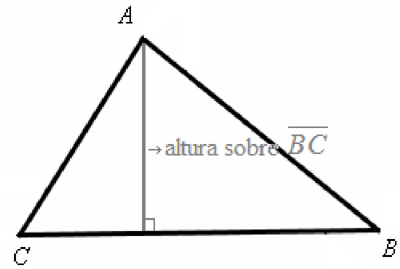
6. ___ En el triángulo ΔABC, el circuncentro es O. Entonces $2OA < BC$.

III PARTE: Construya en su cuaderno, con regla y compás, el circuncírculo de los triángulos con las siguientes longitudes como lados.

1. $(3cm, 4cm, 5cm)$ **2.** $(3{,}5cm,\ 4cm,\ 4{,}5cm)$ **3.** $(2{,}5cm,\ 2cm,\ 4cm)$ **4.** $(3cm,\ 3cm,\ 4cm)$

B. Alturas

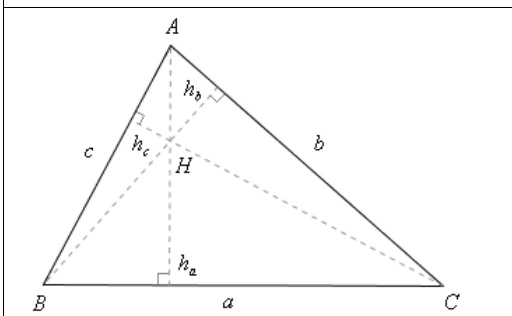
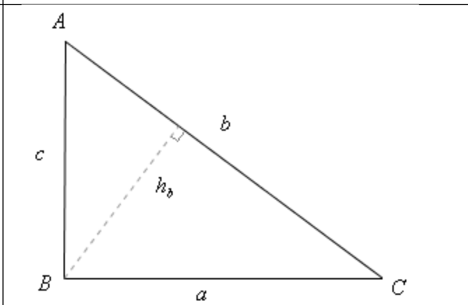
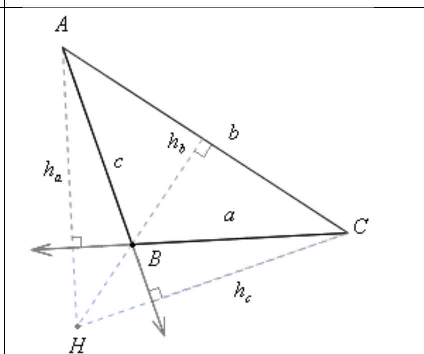
Las alturas de un triángulo son segmentos notables que se utilizan constantemente, ya que son determinantes para encontrar, con la fórmula básica, el área de un triángulo.



> La **altura** sobre un lado es el segmento perpendicular a un lado de un triángulo que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

B.1 Propiedades de las alturas

Las tres alturas de un triángulo son concurrentes. El punto de intersección se llama **ortocentro.**
La posición de H , el ortocentro, depende de la clasificación según los ángulos del triángulo:

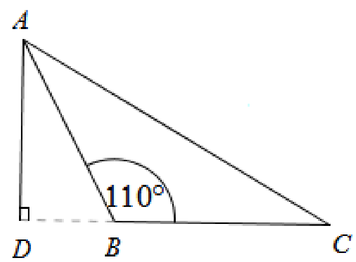
Acutángulo: El ortocentro está en el interior del triángulo.	**Rectángulo:** El ortocentro es el vértice del ángulo recto $H = B$ (La altura sobre un cateto es el otro cateto).	**Obtusángulo:** El ortocentro está en el exterior del triángulo (Debemos prolongar los lados para dibujar las alturas)
		

- Observe que la altura dibujada desde un ángulo agudo de un triángulo obtusángulo es exterior al triángulo.

EJEMPLO 2. En el ΔABC , la medida del ángulo $\angle B$ es $110°$. Si $\overline{AD}$ es una altura, con D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, calcule la medida del $\angle DAB$.

Soluciones B.1

EJEMPLO 2. En el ΔABC, la medida del ángulo $\angle B$ es $110°$. Si $\overline{AD}$ es una altura, con D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, calcule la medida del $\angle DAB$.



Primero, veamos que como el triángulo es obtusángulo, para dibujar la altura sobre $\overline{BC}$ es necesario prolongar este lado. Luego, $m\angle ABD = 180° - 110° = 70°$.

El ángulo $\angle ADB$ es recto por la definición de altura, y por suma de ángulos internos en ΔADB:

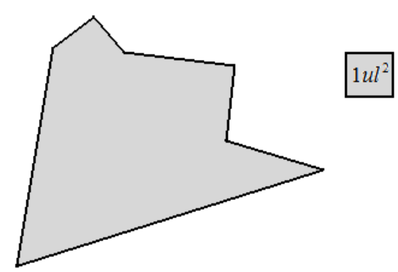
$$m\angle DAB + 90° + 70° = 180° \Rightarrow m\angle DAB + 160 = 180° \Rightarrow m\angle DAB = 20°.$$

B.2 Fórmula básica de área

Las figuras planas determinan lo que llamamos **superficies**. Cuando hablamos de superficie nos referimos a una forma plana. Tenemos superficies triangulares, rectangulares, cuadradas, circulares y de muchas otras formas.

Cuando nos referimos al **área** nos referimos a una comparación del tamaño de la superficie con respecto a un patrón. Por lo general, este patrón es un cuadrado cuyo lado es una unidad.

El área de una figura nos contesta la pregunta ¿Cuántos cuadrados de lado $1ul$ "caben" en esa superficie?



En la sección de cuadriláteros daremos una justificación de dónde vienen las fórmulas para encontrar el área que utilizamos generalmente.

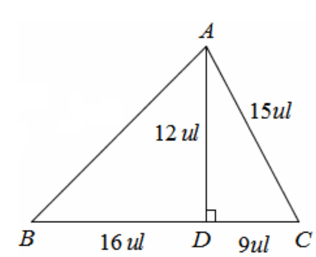
Por el momento, es adecuado ver que la propiedad más importante de las alturas de un triángulo es que nos permiten encontrar el área.

Sea ΔABC con $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$. Si h_a, h_b y h_c representan las alturas sobre a, b y c respectivamente, entonces $(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, donde (ABC) representa el área del triángulo.

- En síntesis, el área de un triángulo es el producto de una base por su altura correspondiente dividido por dos.

EJEMPLO 3. En el ΔABC, $a = 4cm, h_a = 3cm$ y $h_b = 2cm$. Calcule b.

EJEMPLO 4. En la siguiente figura, encuentre (ABC).



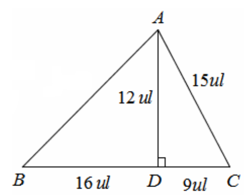
Soluciones B.2

EJEMPLO 3. En el ΔABC , $a=4cm, h_a=3cm$ y $h_b=2cm$. Calcule b .

Podemos calcular el área del triángulo, ya que tenemos una base y su respectiva altura.

$(ABC)=\frac{a\cdot h_a}{2} \Rightarrow (ABC)=\frac{4\cdot 3}{2}=6cm^2$. Pero este resultado debe ser igual al que obtenemos al calcular el área sobre la base b . Entonces, $(ABC)=\frac{b\cdot h_b}{2} \Rightarrow 6=\frac{b\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow b=6cm$.

EJEMPLO 4. En la siguiente figura, encuentre (ABC).



La base $\overline{BC}$ mide $16+9=25$ y, por la tanto, el área es $(ABC)=\frac{25\cdot \overbrace{\cancel{12}}^{6}}{\cancel{2}}=150ul^2$

Ejercicio B.

I PARTE: En las figuras del ortocentro, en la página anterior, resalte con un color las alturas.

II PARTE: Escribir F (Falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición dada. Justifique su respuesta.

1. ___ El ortocentro de un triángulo rectángulo es exterior al triángulo.

2. ___ Para dibujar las tres alturas de un triángulo obtusángulo, es necesario prolongar sus tres lados.

3. ___ Si en el ΔABC acutángulo D es el pie de la altura sobre $\overline{AB}$, entonces el $\angle ACD$ es recto.

4. ___ En el ΔABC , $m\angle B>90°$ y D es el pie de la altura sobre $\overline{BC}$, entonces el $m\angle BAC>m\angle DAC$.

5. ___ Si en el ΔMNO , $MN=NO$ y D es el pie de la altura sobre $\overline{NO}$, entonces el $ND=DO$.

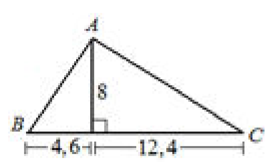
6. ___ En un triángulo, la altura pasa por el punto medio del lado opuesto.

III PARTE:

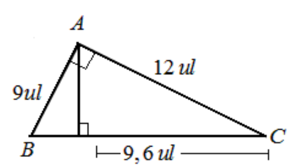
1. En el ΔABC , la altura sobre $\overline{BC}$ mide $6cm$. Si $AB=9cm$ y $BC=6cm$, ¿cuánto mide la altura sobre $\overline{AB}$?

2. Calcule el área de ΔABC en las siguientes figuras:

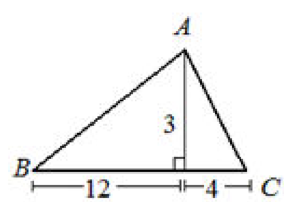
a)



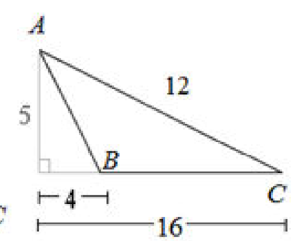
b)



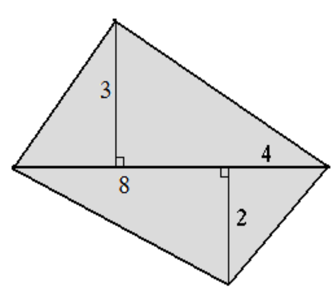
c)



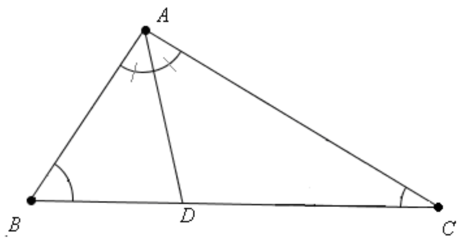
d)



3. Encuentre el área sombreada



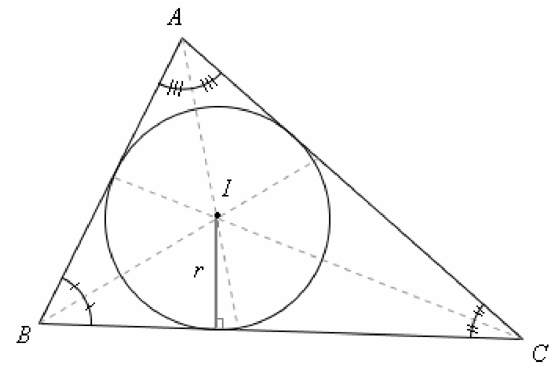
C. Bisectrices



La **bisectriz** de un ángulo del triángulo es el segmento que lo divide en dos ángulos congruentes.

Las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto que llamaremos **incentro** I. El segmento perpendicular desde el incentro hasta algún lado se llama **inradio.** El círculo con centro en I y que es tangente a los lados del triángulo se llama **incírculo.** I es el único punto del triángulo que está a la misma distancia de los lados del triángulo.

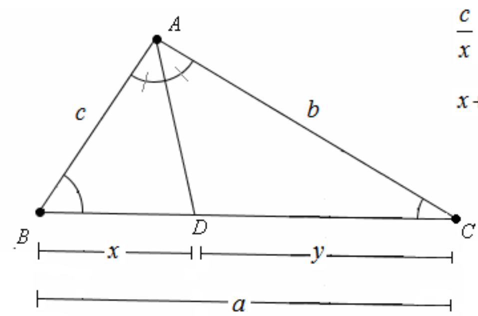
En general, el pie de la bisectriz sobre un lado de un triángulo **NO** es el punto medio.



EJEMPLO 5. **En el ΔABC, $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$ con D sobre $\overline{AC}$. Si $m\angle DBC = 25°$ y $m\angle ACB = 50°$, encuentre el valor numérico de $m\angle BAC - m\angle BDA$.**

- Como el pie de la bisectriz en general no es el punto medio del lado opuesto, necesitamos información adicional para determinar la medida de los segmentos en que la bisectriz divide al lado opuesto. Esta información se encuentra en el teorema de la bisectriz.

TEOREMA (DE LA BISECTRIZ) Si $\overline{AD}$ es la bisectriz interna del $\angle CAB$, con D sobre el lado $\overline{BC}$ del ΔABC, entonces: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$.

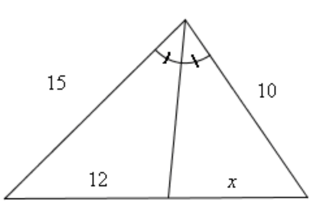


$\dfrac{c}{x} = \dfrac{b}{y}$

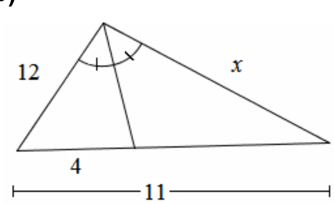
$x + y = a$

EJEMPLO 6. **Encuentre los valores de las variables**

a)

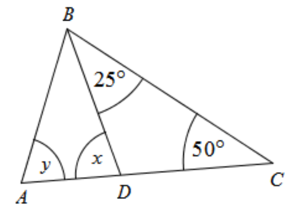


b)



Soluciones C.

EJEMPLO 5. En el ΔABC, $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$ con D sobre $\overline{AC}$. Si $m\angle DBC = 25°$ y $m\angle ACB = 50°$, encuentre el valor numérico de $m\angle BAC - m\angle BDA$.



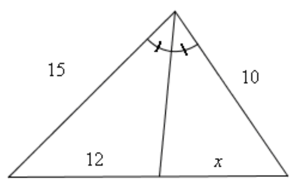
Como $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$, entonces $m\angle ABC = 50°$ y, por la suma de ángulos internos en ΔABC, $y + 50° + 50° = 180° \Rightarrow y = 80°$.

Por el teorema del ángulo externo, $x = 25° + 50° = 75°$.

Entonces, el valor numérico pedido es: $m\angle BAC - m\angle BDA = 80° - 75° = 5°$.

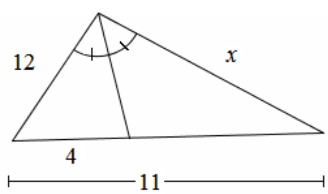
EJEMPLO 6. Encuentre los valores de las variables

a)



Al aplicar el teorema de la bisectriz: $\frac{15}{12} = \frac{10}{x}$ y simplificando la primera fracción: $\frac{5}{4} = \frac{10}{x}$, y para que esta proporción se cumpla: $x = \frac{4 \cdot 10}{5} \Rightarrow x = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$.

b)



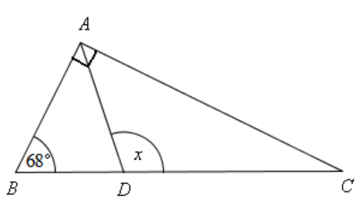
El otro segmento determinado por el pie de la bisectriz mide $11 - 4 = 7$.

Entonces, al aplicar el teorema de la bisectriz: $\frac{12}{4} = \frac{x}{7} \Rightarrow 3 = \frac{x}{7}$, y esto es posible únicamente si $x = 3 \cdot 7 \Rightarrow x = 21$.

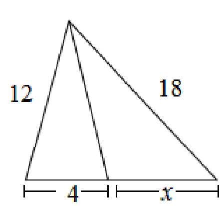
Ejercicio C.

I PARTE: En las siguientes figuras, el segmento dibujado en el interior del triángulo corresponde a una **bisectriz.** Encuentre el valor de cada variable.

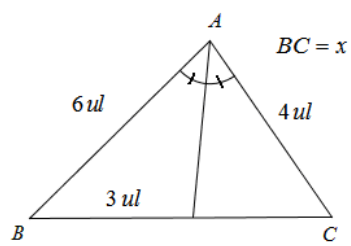
1.



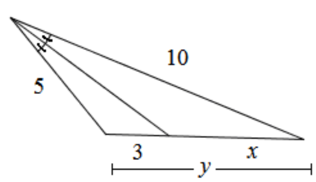
2.



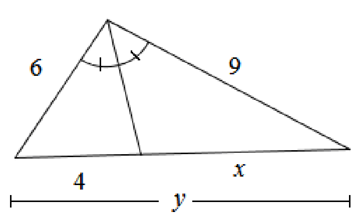
3.



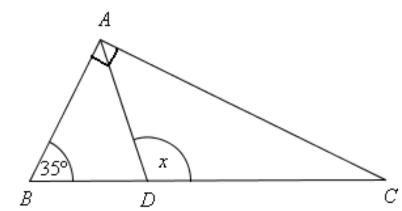
4.



5.



6.



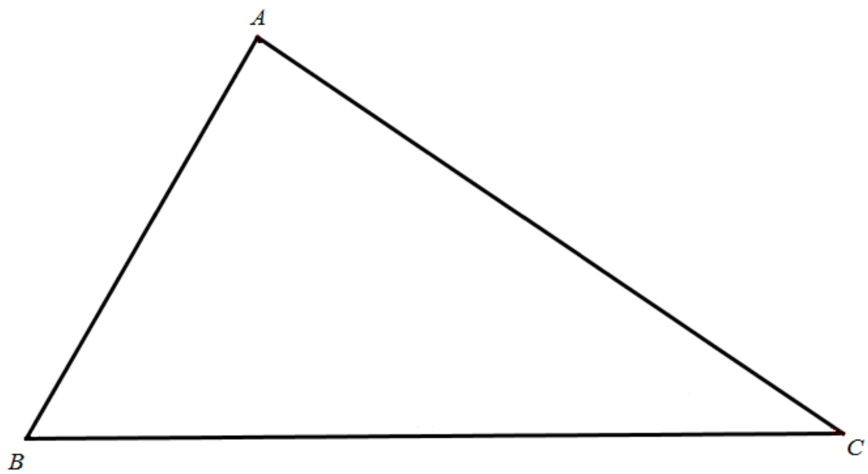
II PARTE: Resuelvas los siguientes problemas.

1. En el ΔABC, $m\angle C = 2m\angle A$ y D es el pie de la bisectriz del $\angle B$. Si $m\angle DBA = 30°$, encuentre $m\angle BDC$.
2. En un examen, un estudiante estableció como siempre verdadera la siguiente relación: "Si $m\angle ABC = 48°$ y $m\angle DBA = 24°$, entonces $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz de $\angle ABC$. Explique por qué el estudiante está equivocado.

D. Medianas

Ejercicio Introductorio D.

(1) Considere el siguiente triángulo:



(2) Mida con una regla los lados del triángulo.

(3) Encuentre los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$. Llámelos A', B' y C' respectivamente.

(4) Trace en color azul el segmento $\overline{A'B'}$. Mídalo y busque dos relaciones que tiene $\overline{A'B'}$ con $\overline{AB}$.

- Un segmento que une dos puntos medios de los lados de un triángulo se llama **paralela media**.

(5) Trace las otras dos paralelas medias en color azul.

(6) Un segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto se llama **mediana**. Trace las tres medianas del triángulo en color rojo.

(7) Observe que las tres medianas se intersecan en un punto. Este punto se llama **baricentro**.

Denote el baricentro con G.

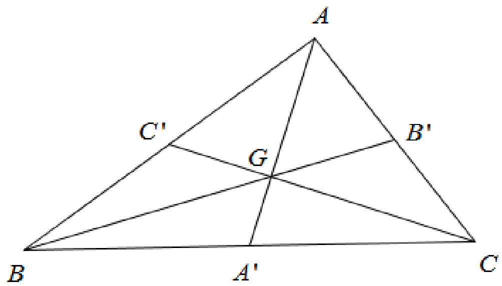
(8) Aproxime, midiendo con la regla los segmentos necesarios, las siguientes cantidades:

$$\frac{AG}{GA'} \approx \underline{\qquad} \approx 2 \quad \frac{BG}{GB'} \approx \underline{\qquad} \approx 2 \quad \frac{CG}{GC'} \approx \underline{\qquad} \approx 2$$

(9) Dibuje segmentos perpendiculares desde G hasta los lados. Mida cada uno de estos segmentos para aproximar (BGA'), (CGA'), (CGB'), (AGB'), (AGC') y (BGC'). ¿Qué puede conjeturar?

El segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto en un triángulo se llama **mediana.**

Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamado **baricentro**.



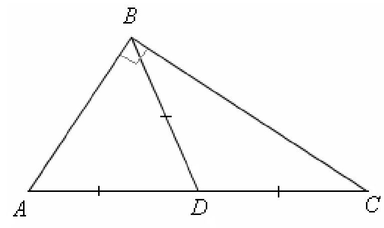
El Baricentro también es llamado centroide o gravicentro. Además, el Baricentro divide a cada mediana en razón 2:1. El Baricentro divide al triángulo en seis triángulos de igual área.

EJEMPLO 7. En el ΔABC, D es el punto medio de $\overline{AB}$ y G el baricentro.

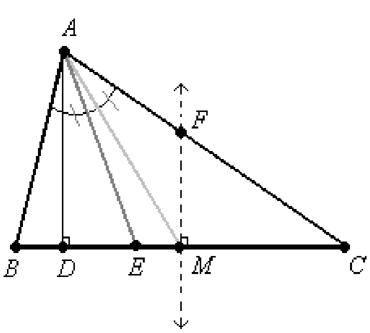
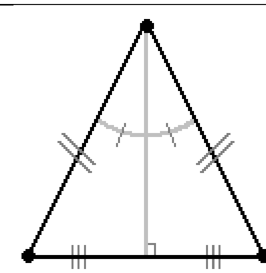
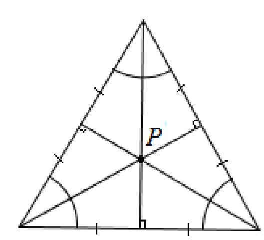
a) Si $(ABCG) = 28cm^2$, encuentre (ABC).

b) Si $CD = 15cm$. Encuentre CG.

En un triángulo rectángulo, la longitud de la mediana sobre la hipotenusa es igual a la mitad de la hipotenusa y, por lo tanto, en la figura los triángulos ΔADB y ΔCDB son isósceles.



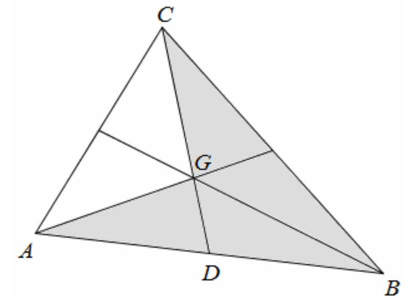
EJEMPLO 8. En el triángulo rectángulo ΔABC recto en C, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $m\angle CMA = 70°$. Encuentre la medida del $\angle CBA$.

➢ En resumen, de acuerdo con los datos de la figura:		➢ Para triángulos isósceles y equiláteros:	
	• $\overline{AD} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AD}$ es una **altura.** • $\angle BAE \cong \angle EAC \Rightarrow \overline{AE}$ es una **bisectriz.**	• En un triángulo isósceles, las rectas notables sobre la base (lado posiblemente desigual) coinciden.	
	Si M es el punto medio de $\overline{BC}$ • $\Rightarrow \overline{AM}$ es una **mediana.** • Si $\overleftrightarrow{MF} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{MF}$ es una **mediatriz.**	• En un triángulo **equilátero** sobre cualquier lado, las rectas coinciden. • Además, el circuncentro, el ortocentro, el incentro y el baricentro son el mismo punto llamado **Punto de Euler** (P)	

Soluciones D.

EJEMPLO 7. En el ΔABC , D es el punto medio de $\overline{AB}$ y G el baricentro.

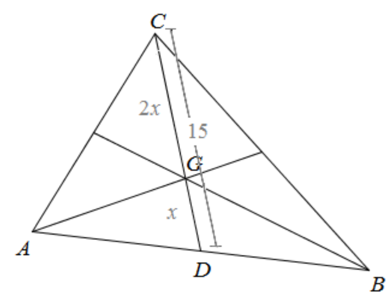
a) Si $(ABCG) = 28cm^2$, encuentre (ABC).



Al dibujar la situación, tenemos que el cuadrilátero está formado por cuatro de los seis triángulos que tienen la misma área y, por lo tanto, el área de cada uno de estos triángulos debe ser $\frac{28}{4} = 7cm^2$.

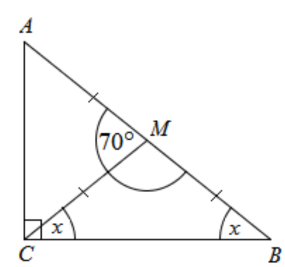
Luego, el área de todo el triángulo ΔABC es igual a seis veces ese valor, es decir, $(ABC) = 6 \cdot 7cm^2 = 42cm^2$.

b) Si $CD = 15cm$. Encuentre CG .



El baricentro divide a la mediana en dos segmentos de forma que la medida de uno es el doble de la medida del otro y, por lo tanto, si denotamos con x la medida del más pequeño entonces el más grande mide $2x$.Luego, debemos tener que $x + 2x = 15$ y resolviendo $3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$ y, por lo tanto, $CG = 2x \Rightarrow CG = 2 \cdot 5 = 10cm$.

EJEMPLO 8. En el triángulo rectángulo ΔABC recto en C , M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $m\angle CMA = 70°$. Encuentre la medida del $\angle CBA$.



El segmento $\overline{CM}$ es la mediana sobre la hipotenusa, y recordemos que esto significa que forma dos triángulos isósceles.

Entonces, los ángulos $\angle MBC$ y $\angle MCB$ son congruentes.

Como $m\angle CMB = 180° - 70° = 110°$, entonces por la suma de ángulos internos en ΔMBC : $x + x + 110° = 180° \Rightarrow 2x = 70° \Rightarrow x = \frac{70°}{2} = 35°$.

Ejercicio D.

I PARTE: En la siguiente pregunta cada uno de los incisos es **independiente**. Con respecto a un ΔABC, donde D es el punto medio de $\overline{BC}$ y G es el baricentro.

1. Si $AG = 6cm$, encuentre GD.

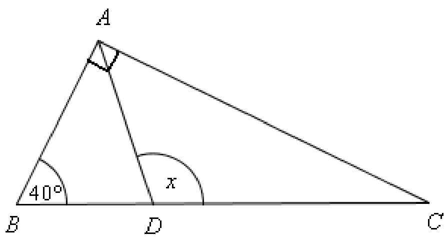
2. Si $AG = x+6$ y $GD = 18$, encuentre AD.

3. Si $AD = 12cm$, encuentre AG.

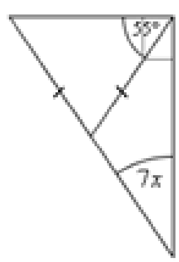
4. Si $(AGB) = 15cm^2$ encuentre (CGB).

II PARTE: En cada una de las siguientes figuras, encuentre el valor de las variables.

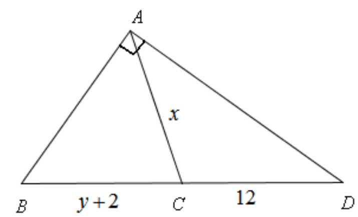
1. Si $\overline{AD}$ es una mediana.



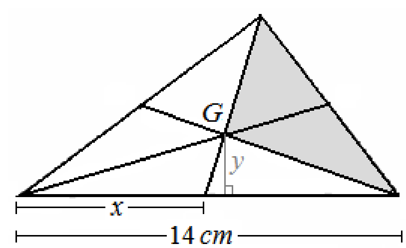
2.



3. $\overline{AC}$ mediana



4. En la figura G es el baricentro, el área sombreada es $28\,cm^2$ y y es la distancia de G al lado que mide $14cm$.



III PARTE: En cada paréntesis, escriba (1) si se refiere a una propiedad de las medianas, (2) si es de las bisectrices, (3) si es de las alturas y (4) si es de las mediatrices.

(   ) Es un segmento que divide en dos ángulos congruentes un ángulo del triángulo.

(   ) Concurren en el baricentro.

(   ) Es una recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

(   ) Concurren en el incentro.

(   ) Es una recta perpendicular a un lado que pasa por el punto medio de este.

(   ) Concurren en el ortocentro.

(   ) En un triángulo rectángulo, dos de ellas coinciden con los catetos del triángulo.

(   ) Es una recta que pasa por el punto medio de un lado y por el vértice opuesto a ese lado.

(   ) Concurren en el circuncentro.

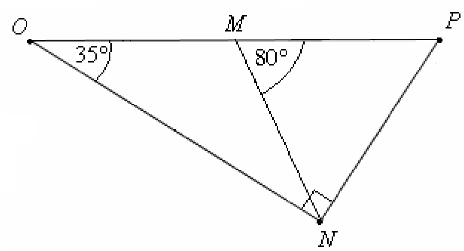
(   ) Su punto de intersección es el centro del círculo inscrito.

(   ) Su punto de intersección es el centro del círculo circunscrito.

AUTOEVALUACIÓN Rectas Notables

I PARTE: Selección única

1) Con base en los datos de la figura, el segmento $\overline{MN}$ es una:

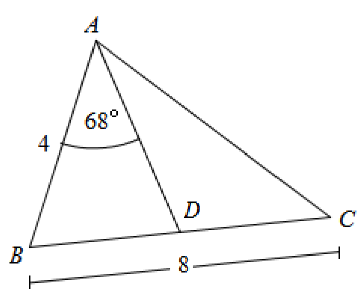


A) Altura.
B) Bisectriz.
C) Mediana.
D) Mediatriz.

2) En el ΔABC, con $m\angle B = 135°$ y $m\angle A = 20°$. Si D está sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, de manera que $\overline{AD}$ es una altura del triángulo, se puede asegurar que:

A) $DC < BC$
B) $AD > AB$
C) $m\angle DAB > m\angle ACB$
D) $m\angle ACB > m\angle ADB$

3) Con base en los datos de la figura, donde $\overline{AD}$ es una mediana, entonces la medida del ángulo $\angle ADC$ corresponde a:



A) $112°$
B) $134°$
C) $56°$
D) $68°$

4) Considere las siguientes afirmaciones:

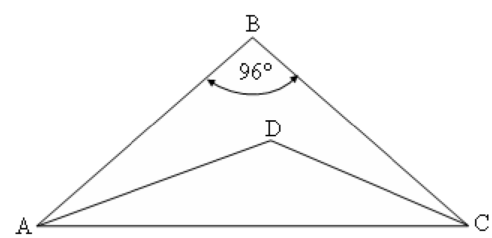
i) Si $m\angle ABC = 48°$ y $m\angle DBC = 24°$ entonces $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del $\angle ABC$.

ii) Si I es el incentro del ΔABC, entonces $\angle BAI \cong \angle CAI$.

De ellas son, con certeza, verdaderas:

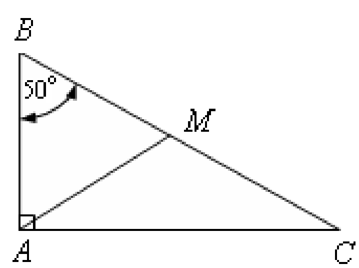
A) Solo la i).
B) Solo la ii).
C) Ambas.
D) Ninguna.

5) De acuerdo con los datos de la figura, si ΔABC es isósceles y $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ entonces con certeza se cumple que:



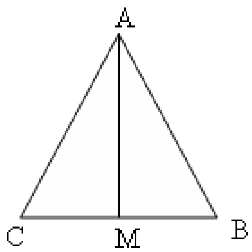
A) $m\angle ADC = 96°$
B) $m\angle BCA = 96°$
C) $m\angle DAC = 21°$
D) $m\angle BCD = 21°$

6) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{AM}$ es una mediana del $\angle BAC$, entonces la $m\angle AMC$ es:



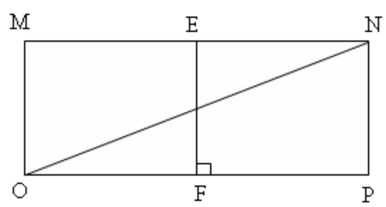
A) $100°$
B) $50°$
C) $90°$
D) $80°$

7) De acuerdo con los datos de la figura, en la que $\overline{AM}$ es la mediatriz del $\overline{BC}$. Con certeza se cumple que ΔAMC es:



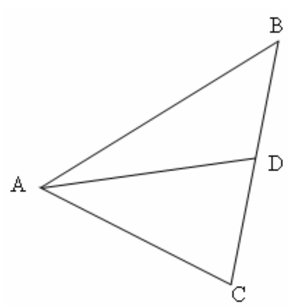
A) Acutángulo.
B) Rectángulo.
C) Escaleno.
D) Isósceles.

8) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{MN} \| \overline{OP}$, $ME = EN$, la mediatriz de $\overline{MN}$ es la recta que contiene los puntos:



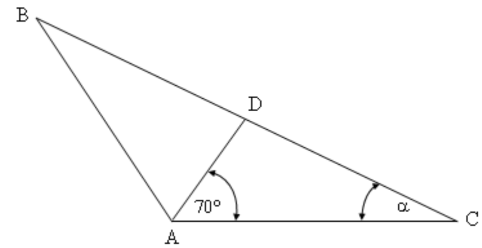
A) O y P
B) E y F
C) N y P
D) O y N

9) De acuerdo con la figura, en el ΔABC, si $\overline{AD}$ es una mediana, entonces con certeza se cumple que:



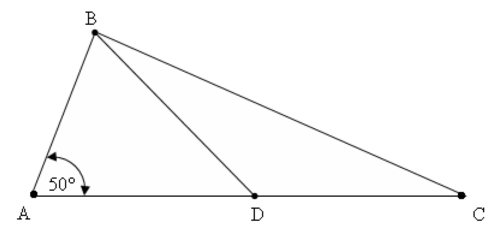
A) $\angle ADB \cong \angle ADC$
B) $\angle BAD \cong \angle CAD$
C) $\overline{BD} \cong \overline{CD}$
D) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

10) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ y $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ¿cuál es el valor α?



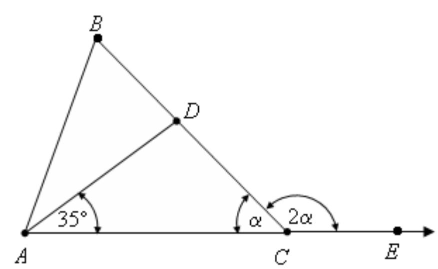
A) $70°$
B) $55°$
C) $40°$
D) $20°$

11) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overleftrightarrow{BD}$ es una mediana del ΔABC, $AD = BD$, entonces ¿cuál es la $m\angle CBA$?



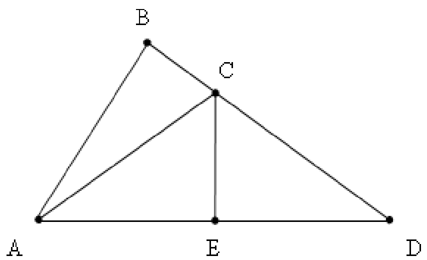
A) $50°$
B) $80°$
C) $90°$
D) $100°$

12) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del $\angle BAC$, entonces con certeza se cumple que $m\angle ABC$ es:



A) $35°$
B) $50°$
C) $60°$
D) $70°$

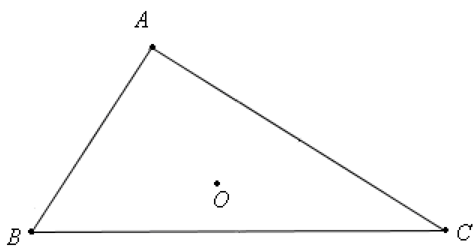
13) De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{EC}$ es una altura del ΔACD y $AE = ED$, entonces, en ΔABD, $\overline{CE}$ es una:



E – D – C

A) Altura.
B) Bisectriz.
C) Mediana.
D) Mediatriz.

14) En la figura, O es el circuncentro del ΔABC, entonces, con certeza:



A) El triángulo ΔABC es acutángulo.
B) El triángulo ΔABC es rectángulo.
C) El triángulo ΔABC es obtusángulo.
D) No se puede asegurar ninguna de las anteriores.

15) La recta $\overleftrightarrow{MN}$ es la mediatriz del lado $\overline{BD}$, del ΔABD de manera que $B-N-D$. Considere las siguientes afirmaciones:

i) El ΔBMD es isósceles.
ii) $\overline{AN} \perp \overline{BD}$

De ellas son, con certeza, verdaderas:
A) Solo la i).
B) Solo la ii).
C) Ambas.
D) Ninguna.

16) Si el ortocentro de un triángulo coincide con el vértice del ángulo recto, entonces:

A) El triángulo es con certeza acutángulo.
B) El triángulo es con certeza rectángulo.
C) El triángulo es con certeza obtusángulo.
D) No se puede asegurar ninguna de las anteriores.

17) Si el ortocentro de un triángulo está en el exterior del triángulo, entonces:

A) El triángulo es con certeza acutángulo.
B) El triángulo es con certeza rectángulo.
C) El triángulo es con certeza obtusángulo.
D) No se puede asegurar ninguna de las anteriores.

18) En el ΔABC, con $m\angle A = 70°$ y $m\angle B = 80°$ y la mediatriz sobre $\overline{BC}$ lo interseca en M e interseca el lado $\overline{AC}$ en E. Entonces, se puede asegurar que:

A) $BM < MC$
B) $EC > EB$
C) $m\angle ABC + m\angle MEB = 2m\angle BAC$
D) $B-E-A$

II PARTE: Escribir F (Falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición dada.

1. ___ Si una recta es perpendicular a un segmento, entonces esta es la mediatriz del segmento.

2. ___ Para dibujar las tres alturas de un triángulo acutángulo, es necesario prolongar sus tres lados.

3. ___ Si en el ΔABC acutángulo, D es el pie de la altura sobre $\overline{AB}$, entonces el $\angle ADC$ es recto.

4. ___ En el ΔABC, $m\angle B < 90°$ y D es el pie de la altura sobre $\overline{BC}$, entonces $m\angle BAC > m\angle DAC$.

5. ___ Si en el ΔMNO, $MN = NO$ y D es el pie de la altura sobre $\overline{MO}$, entonces el $MO = 2 \cdot OD$.

6. ___ En un triángulo, la bisectriz pasa por el punto medio del lado opuesto.

7. ___ Si $m\angle BAD = 38°$ y $m\angle BAC = 19°$, entonces $\overrightarrow{AC}$ es la bisectriz del $\angle BAD$.

8. ___ En un triángulo, la altura correspondiente al lado mayor mide más que la altura correspondiente al lado menor.

9. ___ Si en el ΔABC, $\overline{BD}$ es la mediana del lado $\overline{AC}$ y $D \in \overline{AC}$, entonces $AD = DC$.

III PARTE: Para el siguiente triángulo: $\angle SUD \cong \angle DUT$, $\overleftrightarrow{MN}$ es una mediatriz, el punto X equidista de los vértices U, S y T.Complete correctamente las siguientes proporciones con respecto a las rectas notables.

1. Una altura del ΔUST es:________________.

2. M es el ____________________ de $\overline{ST}$.

3. Una mediana del ΔUST es _________.

4. Una bisectriz del ΔUST es _________.

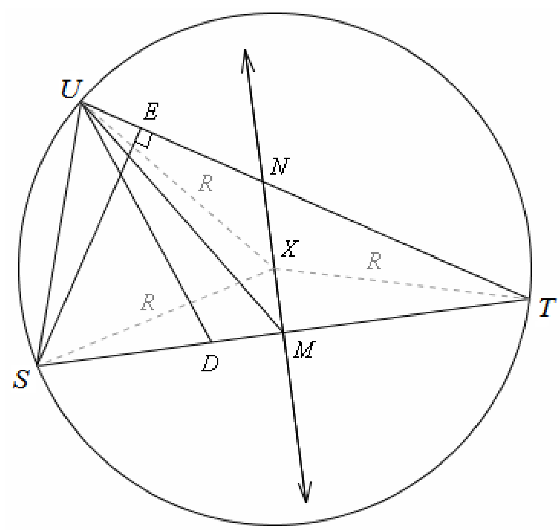
5. El punto X es el _______________ del triángulo ΔUST.

6. R es el ____________________ del triángulo ΔUST.

7. El ΔUXT es con certeza un triángulo _______________.

8. El ΔNMT es con certeza un triángulo _______________.

9. El ΔUST es con certeza un triángulo _______________.

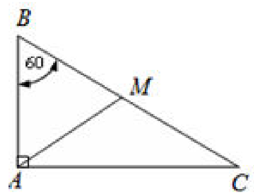


IV PARTE: Resuelva los siguientes problemas:

1. En el ΔABC isósceles, la medida del ángulo $\angle ABC$ es $126°$. Si $\overline{AD}$ es la altura de ΔABC, con D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, ¿cuál es la medida del $\angle DAC$?

2. En el ΔABC, D está sobre el lado $\overline{BC}$ de forma que $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$. Si $m\angle ABC = 80°$ y $m\angle CDA = 100°$. Calcule la medida del $\angle ACB$.

3. En la siguiente figura, calcule la medida del $\angle AMC$ en el caso de que:



a) $\overline{AM}$ es una bisectriz.

b) $\overline{AM}$ es una altura.

c) $\overline{AM}$ es una mediana.

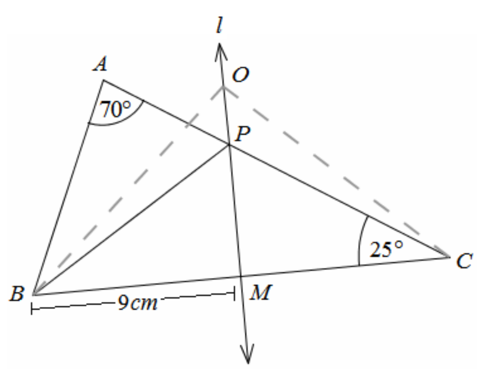
4. En un triángulo ΔABC, D es el punto medio de $\overline{BC}$. Si $AD = 18$, encuentre GD donde G es el baricentro del triángulo.

5. En el ΔDEF, H es el punto medio de $\overline{DE}$ y G el baricentro.

a) Si $(DEF) = 18ul^2$, encuentre (DEG).

b) Si $FG = 6ul$, encuentre FH.

6. En la siguiente figura, l es la mediatriz del lado $\overline{BC}$, entonces:



a) Encuentre BC.

b) Encuentre $m\angle PMC$.

c) Encuentre $m\angle BPA$.

d) Si $OB = 15cm$, encuentre OC.

7. La mamá de Juliana es ingeniera civil y sabe que todos los objetos tienen un punto de equilibrio, es decir un punto en el cual deben apoyarse para sostenerse. Un día Juliana quería construir un **móvil** de forma triangular y le preguntó a su mamá donde debía colocar el hilo para que el móvil no se desequilibre. Su mamá le ayudó contestándole que lo podía averiguar con lo que aprendió en el colegio.

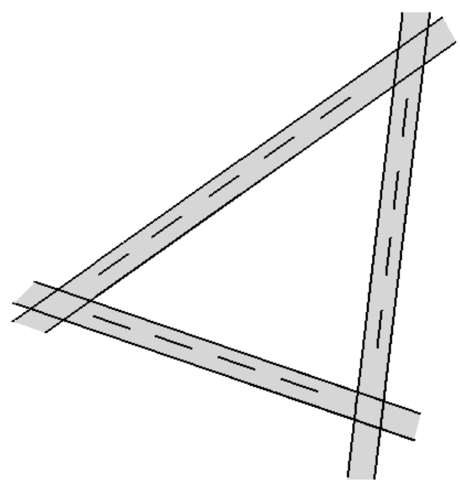
a) Ayúdale a Juliana construyendo un triángulo de cartulina con lados $8cm, 10cm$ y $14cm$ y encontrando los puntos notables de ese triángulo.

b) ¿Cuál de los puntos notables, será el punto de equilibrio? Verifícalo colgando el triángulo desde el techo con un hilo en los puntos notables.

c) ¿Cuál de las propiedades de ese punto notable es la que hace que ese sea el centro de equilibrio?

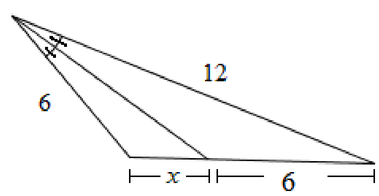
8. En el siguiente croquis se muestran tres autopistas que delimitan una ciudad. Un empresario desea ubicar una gasolinera en la ciudad de manera que la gasolinera esté lo más cerca posible de cada una de las autopistas.

Utiliza los conocimientos aprendidos en esta sección para explicarle al empresario donde es más conveniente para él construir la gasolinera.

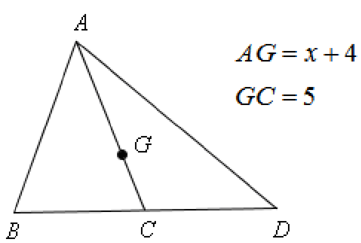


V PARTE: En las siguientes figuras, encuentre los valores de las variables:

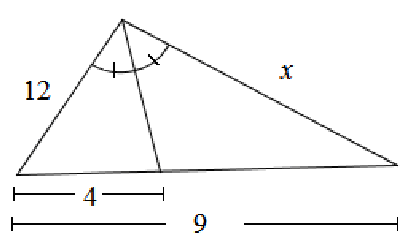
1.



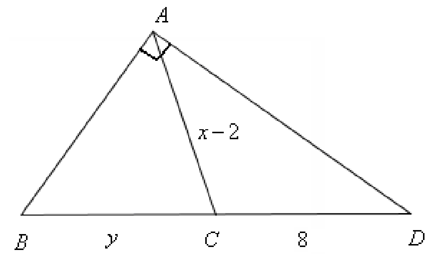
2. G baricentro.



3.



4. $\overline{AC}$ mediana.



5. G baricentro.